Vorlesung „Modellierung“

Prof. Janis Voigtländer

Wintersemester 2017/18

Petrinetze: Grundlagen und Erreichbarkeitsgraphen

Motivation: Petrinetze

Petrinetze sind ein Formalismus zur Modellierung mit folgenden Eigenschaften:

- Vorstellung von Systemübergängen, bei denen (gemeinsame) Ressourcen konsumiert und neu erzeugt werden können.
- Einfache Modellierung von Kapazitäten, räumlicher Verteilung der Ressourcen, von Nebenläufigkeit, Parallelität und (Zugriffs-)Konflikten.
- Intuitive grafische Darstellung.

Petrinetze werden in der Praxis vielfach benutzt.

In UML sind sie abgewandelt als sogenannte Aktivitätsdiagramme (englisch: activity diagrams) eingegangen.

Motivation: Petrinetze

Parallelität versus Nebenläufigkeit:

Parallelität

Zwei Ereignisse finden parallel statt, wenn sie gleichzeitig ausgeführt werden.

Nebenläufigkeit

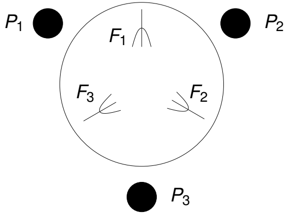
Zwei Ereignisse sind nebenläufig, wenn sie parallel ausgeführt werden können (jedoch nicht müssen), das heißt, wenn zwischen ihnen keine kausale Abhängigkeit besteht.

Das bedeutet: Nebenläufigkeit ist der allgemeinere Begriff.

Motivation: Petrinetze

Ein verbreitetes Beispiel: Dining Philosophers

- Es sitzen drei (oder vier, oder fünf, ...) Philosophen P_i um einen runden Tisch, zwischen je zwei Philosophen liegt eine Gabel (fork) F_i.
- Philosophen werden von Zeit zu Zeit hungrig und benötigen dann zum Essen beide benachbarte Gabeln.
- Jeder Philosoph nimmt zu einem beliebigen Zeitpunkt beide Gabeln nacheinander auf (die rechte zuerst), isst und legt anschließend beide Gabeln wieder zurück.



Motivation: Petrinetze

Fragen, die man (zum Beispiel) mit Petrinetzen untersuchen kann:

- Kann das modellierte System kontinuierlich Fortschritt machen, oder lässt es sich in Sackgassen manövrieren?
- Bekommt jede modellierte Aktion die Chance, auch tatsächlich ausgeführt zu werden?
  Nur einmalig oder sogar beliebig oft wiederholt?
- Besteht Fairness für verschiedene Akteure?
- Bedingen bestimmte Aktionen einander, oder schließen sich gegenseitig aus?
- Gibt es Beschränkungen für eventuellen Ressourcenverbrauch und -erzeugung?

Dabei sind bestimmte Analysen sogar für Systeme möglich, deren Zustandsübergangsdiagramm unendlich wäre.

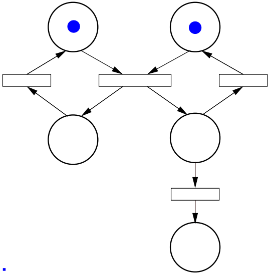
Motivation: Petrinetze

Praktische Anwendungen für Petrinetze:

- Modellierung von Arbeitsabläufen (work flow, business processes)
- Modellierung und Analyse von Web Services
- Beschreibung von grafischen Benutzungsoberflächen
- Prozessmodellierung bei Betriebssystemen
- Ablaufbeschreibungen in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen
- …

Petrinetze: Informelle Einführung

Beispiel für ein Petrinetz:

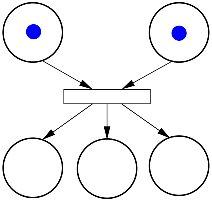


Grafische Darstellung:

- Stellen (dargestellt als Kreise):
  Mögliche Plätze für Ressourcen
- Marken (dargestellt als kleine ausgefüllte Kreise):
  Ressourcen
- Transitionen (dargestellt durch Rechtecke):
  Systemübergänge

Petrinetze: Informelle Einführung

Mehr zur Darstellung einer Transition:



Vorbedingung (Marken, die konsumiert werden)

Nachbedingung (Marken, die erzeugt werden)

Das Entfernen der Marken der Vorbedingung und Erzeugen der Marken der Nachbedingung nennt man Schalten bzw. Feuern der Transition.

Allgemeiner als im Beispiel oben muss nicht unbedingt genau eine Marke pro Pfeil konsumiert oder erzeugt werden.

Und weder müssen die Stellen der Nachbedingung vor dem Schalten leer sein, noch die Stellen der Vorbedingung danach.

Petrinetze: Definitionen

Petrinetz (Definition)

Ein Petrinetz ist ein Tupel $N = (S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0)$, wobei

- S eine Menge von Stellen und
- T eine Menge von Transitionen ist.
- Außerdem gibt es für jede Transition t zwei Funktionen ${}^\bullet t : S \to \mathbb{N}_0$ und $t^\bullet : S \to \mathbb{N}_0$, die angeben, wie viele Marken durch t aus einer Stelle entnommen bzw. in eine Stelle gelegt werden.
- Und $m_0 : S \to \mathbb{N}_0$ ist die Anfangsmarkierung (oder initiale Markierung).

Der Wert ${}^\bullet t(s)$ bzw. $t^\bullet(s)$ wird jeweils als Gewicht bezeichnet.

Petrinetze: Definitionen

Markierung

Eine Markierung ist eine Funktion $m : S \to \mathbb{N}_0$.

Sie kann festhalten:

- wie viele Marken aktuell in einzelnen Stellen liegen,
- wie viele Marken einzelnen Stellen zu entnehmen sind, oder
- wie viele Marken einzelnen Stellen hinzuzufügen sind.

Falls eine Reihenfolge $s_1, \dots, s_n$ der Stellen fixiert wurde, kann eine Markierung m auch durch ein Tupel $(m(s_1), \dots, m(s_n))$ ausgedrückt werden.

Petrinetze: Definitionen

Eine andere Definition von Petrinetzen stellt die Verbindungen zwischen Stellen und Transitionen und die dazugehörigen Gewichte mittels einer Flussrelation dar:

$$F \subseteq (S \cup T) \times (\mathbb{N}_0 \setminus \{0\}) \times (S \cup T)$$

wobei nur Tripel der Formen

- (s, n, t) (Kante von Stelle zu Transition)
- (t, n, s) (Kante von Transition zu Stelle)

mit $s \in S$ und $t \in T$ erlaubt sind.

Zusammenhang zur vorherigen Definition:

$$(s, n, t) \in F \iff {}^\bullet t(s) = n \neq 0$$
$$(t, n, s) \in F \iff t^\bullet(s) = n \neq 0$$

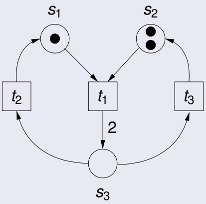
Petrinetze: Darstellung

Genaueres zur grafischen Darstellung:

- Stellen werden als Kreise, Transitionen als Quadrate oder Rechtecke, Marken als kleine ausgefüllte Kreise dargestellt.
- Kanten zwischen Stellen und Transitionen werden als Pfeile dargestellt.
- Die Kanten sind eigentlich mit dem jeweiligen Gewicht beschriftet. Dieses kann jedoch weggelassen werden, falls es den Wert 1 hat. Nur falls ein Gewicht den Wert 0 hat, wird die ganze Kante weggelassen.

Petrinetze: Darstellung

Betrachten wir den Zusammenhang zwischen der mathematischen Notation und der grafischen Darstellung an einem Beispiel:



Stellenordnung:
s_1, s_2, s_3

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$^\bullet t_1\colon\ s_1 \mapsto 1,\ s_2 \mapsto 1,\ s_3 \mapsto 0$$
$$t_1^\bullet\colon\ s_1 \mapsto 0,\ s_2 \mapsto 0,\ s_3 \mapsto 2$$

<u>oder:</u> $^\bullet t_1 = (1,1,0) \quad t_1^\bullet = (0,0,2)$

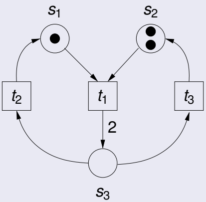
$\ldots$

$$m_0\colon\ s_1 \mapsto 1,\ s_2 \mapsto 2,\ s_3 \mapsto 0$$

<u>oder:</u> $m_0 = (1,2,0)$

Petrinetze: Darstellung

Betrachten wir den Zusammenhang zwischen der mathematischen Notation und der grafischen Darstellung an einem Beispiel:



Stellenordnung:
s_1, s_2, s_3

Alternative Notation (mit Flussrelation):

$$
\begin{aligned}
S &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
F &= \{(s_1, 1, t_1), (s_2, 1, t_1), (t_1, 2, s_3), \\
&\qquad (s_3, 1, t_2), (t_2, 1, s_1), \\
&\qquad (s_3, 1, t_3), (t_3, 1, s_2)\} \\
m_0 &= (1, 2, 0)
\end{aligned}
$$

Petrinetze: Wiederholung

Wichtige Konzepte:

- Markierungen: Funktionen $m : S \to \mathbb{N}_0$
- Vor- und Nachgewichte: ${}^\bullet t$ und $t^\bullet$, selbst Markierungen

Zusammenhang mit grafischer Darstellung:

- Anfangsmarkierung zur Belegung der Stellen
- kein Pfeil von s zu t, falls ${}^\bullet t(s) = 0$
- kein Pfeil von t zu s, falls $t^\bullet(s) = 0$
- Pfeil von s zu t, falls ${}^\bullet t(s) = 1$
- Pfeil von t zu s, falls $t^\bullet(s) = 1$
- Pfeil mit Beschriftung n von s zu t, falls ${}^\bullet t(s) = n > 1$
- Pfeil mit Beschriftung n von t zu s, falls $t^\bullet(s) = n > 1$

Petrinetze: Dynamik

Ordnung und Operationen auf Markierungen:

Seien $m, m' : S \to \mathbb{N}_0$ zwei Markierungen, also Abbildungen von Stellen auf natürliche Zahlen.

Ordnung (Definition)

Es gilt $m' \leq m$ falls für alle $s \in S$ gilt: $m'(s) \leq m(s)$.

In diesem Fall sagt man, dass m' durch m überdeckt wird.

Beispiele: Sei $|S| = 3$, $m = (0,1,2)$, $m' = (0,0,1)$.
Dann gilt $m' \leq m$, aber nicht $m \leq m'$.

Es gilt auch $(0,1,0) \leq (0,1,0)$.

Aber nicht $(3,1,2) \leq (5,1000,1)$.

Und weder $(0,1,2) \leq (0,2,1)$, noch $(0,2,1) \leq (0,1,2)$.

Petrinetze: Dynamik

Ordnung und Operationen auf Markierungen:

Seien $m, m' : S \to \mathbb{N}_0$ zwei Markierungen, also Abbildungen von Stellen auf natürliche Zahlen.

Addition (Definition)

Wir definieren $m'' = m \oplus m'$, wobei $m'' : S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) + m'(s)$ für alle $s \in S$.

Beispiel: $(0,1,2) \oplus (0,0,1) = (0,1,3) = (0,0,1) \oplus (0,1,2)$

Subtraktion (Definition)

Falls $m' \leq m$, definieren wir $m'' = m \ominus m'$, wobei $m'' : S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) - m'(s)$ für alle $s \in S$.

Beispiel: $(0,1,2) \ominus (0,0,1) = (0,1,1)$

Petrinetze: Dynamik

Weitere Konzepte:

Aktivierung (Definition)

Eine Transition t ist für eine Markierung m **aktiviert** falls ${}^\bullet t \le m$ gilt. (Das heißt, falls in m je Stelle genug Marken vorhanden sind, um die Vorbedingung von t zu erfüllen.)

Schalten (Definition)

Sei t eine Transition und m eine Markierung, für die t aktiviert ist. Dann kann t **schalten**, was zu der Nachfolgemarkierung $m' = m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$ führt; zu lesen als $(m \ominus {}^\bullet t) \oplus t^\bullet$.

Symbolisch dargestellt: $m\,[t\rangle\, m'$.

Petrinetze: Dynamik

Weitere Konzepte:

Erreichbarkeit (Definition)

Man nennt eine Markierung m erreichbar, wenn es eine endliche Folge von Transitionen $t_1, \ldots, t_n$ gibt mit

$$m_0 \, [t_1\rangle \, m_1 \, [t_2\rangle \, \cdots \, m_{n-1} \, [t_n\rangle \, m\,,$$

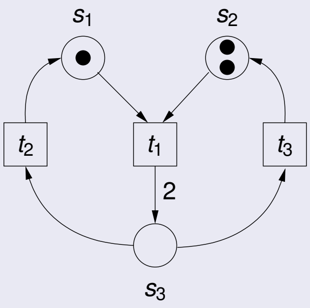
wobei m_0 die Anfangsmarkierung des Petrinetzes ist.

Man schreibt auch $m_0 \, [t_1 \ldots t_n\rangle \, m$, oder $m_0 \, [\tilde{t}\,\rangle \, m$ mit $\tilde{t} = t_1 \ldots t_n$.

Die Sequenz $\tilde{t}$ nennt man Schaltfolge.

Auch die leere Schaltfolge $\tilde{t} = \varepsilon$ is möglich. In diesem Fall ändert sich die Markierung nicht: $m \, [\varepsilon\rangle \, m$, für jede Markierung m.

Petrinetze: Dynamik



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

Die Markierung $m_2 = (1,1,1)$ ist in zwei Schritten erreichbar:

1. ${}^\bullet t_1 = (1,1,0) \le (1,2,0) = m_0$

   $$m_1 = m_0 \ominus {}^\bullet t_1 \oplus t_1^\bullet$$
   $$= (1,2,0) \ominus (1,1,0) \oplus (0,0,2)$$
   $$= (0,1,2)$$

2. ${}^\bullet t_2 = (0,0,1) \le (0,1,2) = m_1$

   $$m_2 = m_1 \ominus {}^\bullet t_2 \oplus t_2^\bullet$$
   $$= (0,1,2) \ominus (0,0,1) \oplus (1,0,0)$$
   $$= (1,1,1)$$

Es gilt also: $m_0\ [t_1\rangle\ m_1\ [t_2\rangle\ m_2$, oder: $m_0\ [t_1 t_2\rangle\ m_2$.

Es gilt auch: $m_0\ [t_1\rangle\ m_1\ [t_3\rangle\ (0,2,1)$.

Petrinetze: Dynamik

Nicht-Determinismus

Petrinetze sind ein nicht-deterministischer Mechanismus.

Das heißt, zu einer Markierung kann es mehrere Nachfolgemarkierungen geben.

Die Frage, wer die Nachfolgemarkierung auswählt, stellt sich für die Modellierung nicht. Das Modell beschreibt, dass alle diese Nachfolgemarkierungen möglich sind und trifft keine Auswahl.

Petrinetze: Dynamik

Zustandsübergangsdiagramm eines Petrinetzes (Definition)

Sei $N = (S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0)$ ein Petrinetz.

Dann besteht das zu N gehörende Zustandsübergangsdiagramm aus folgenden Komponenten:

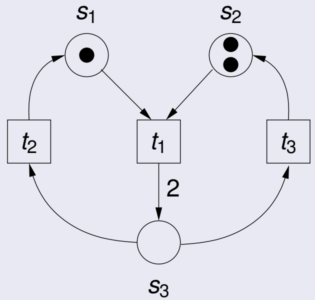
- Zustandsmenge Z: Menge aller erreichbaren Markierungen
- Kantenbeschriftungsmenge L: Menge aller Transitionen
- Übergangsmenge U: $(m, t, m') \in U \iff m\,[t\rangle\, m'$
- Startzustand z_0: die Anfangsmarkierung m_0

Das Zustandsübergangsdiagramm eines Petrinetzes nennt man auch dessen Erreichbarkeitsgraph.

Trotz Endlichkeit des Petrinetzes kann der Erreichbarkeitsgraph unendlich werden!

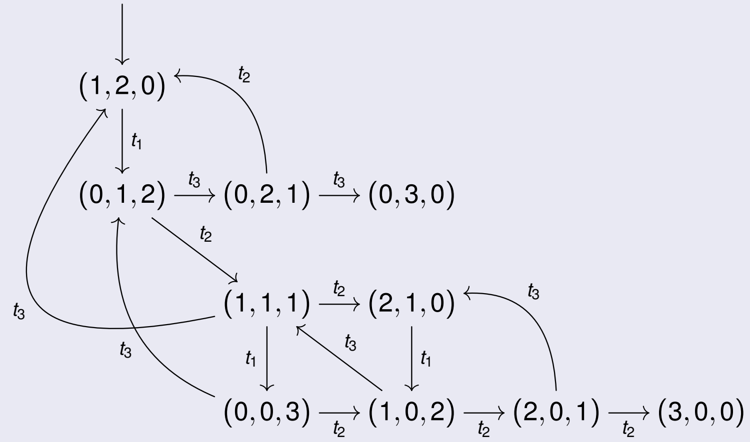
Petrinetze: Dynamik

Beispiel: Bestimme den Erreichbarkeitsgraph für das folgende Petrinetz



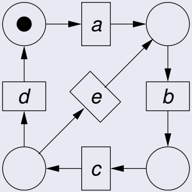
Petrinetze: Dynamik

Erreichbarkeitsgraph für das Beispielnetz:



Petrinetze: Dynamik

Beispiel: Bestimme den Erreichbarkeitsgraph für das folgende Petrinetz



Petrinetze: Dynamik

Frage: Gibt es für jedes (endliche) Zustandsübergangsdiagramm ein Petrinetz, dessen Erreichbarkeitsgraph gerade jenes Zustandsübergangsdiagramm (bzw. dessen erreichbarer Teil) ist?

Idee:

- Zustände werden zu Stellen.
- Übergänge werden zu Transitionen.
- Die Stelle, die den Startzustand darstellt, ist als einzige zu Beginn mit einer Marke belegt.

Jedoch:

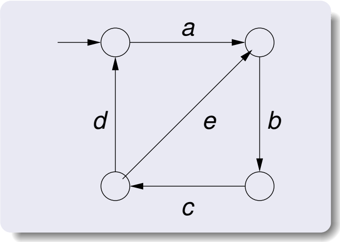
- Das entstandene Petrinetz enthält keinerlei Nebenläufigkeit.
- Bei der Umwandlung

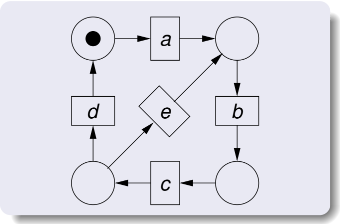
  Petrinetz $\rightarrow$ *Zustandsübergangsdiagramm* $\rightarrow$ *Petrinetz*

  wird das zweite Petrinetz im Allgemeinen viel größer als das erste.

Petrinetze: Dynamik

Beispiel: Umwandlung eines Zustandsübergangsdiagramms in ein Petrinetz (mit entsprechendem Erreichbarkeitsgraph)





Bemerkung:

Die Konstruktion funktioniert so immer dann, wenn jede Beschriftung im Zustandsübergangsdiagramm höchstens einmal vorkommt.

Eigenschaften von Petrinetzen, Überdeckungsgraphen

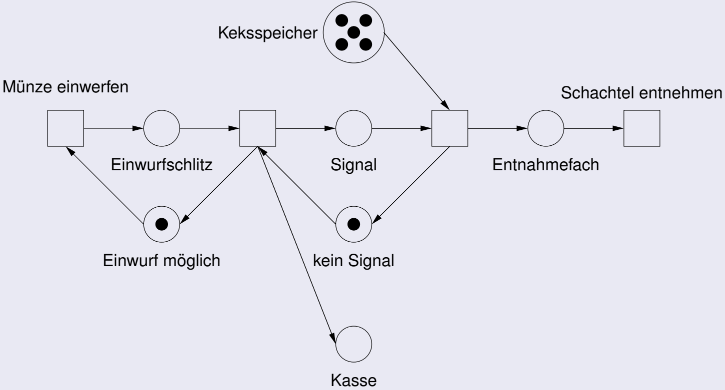
Petrinetz-Beispiel: Keksautomat

Wir modellieren einen Keksautomaten mit folgenden Bestandteilen:

- extern: Einwurfschlitz, Entnahmefach
- intern: Keksspeicher, Kasse, Signalweiterleitung (Einwurf einer Münze soll Signal erzeugen, danach Ausgabe Keks)

Nach: „Petrinetze – Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien“ von W. Reisig

Petrinetz-Beispiel: Keksautomat



Petrinetz-Beispiel: Keksautomat

Ist der Keksautomat so in Ordnung?

Problem: Wenn der Keksspeicher leer ist, ist immer noch Münzeinwurf möglich, ohne Rückgabe.

Es gibt verschiedene denkbare Lösungen für dieses Problem: Rückgabe der Münze, Keks-Zähler, . . .

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Wir betrachten zunächst Begriffe wie Lebendigkeit und Deadlock (= Verklemmung).

Starke Lebendigkeit (Definition)

Man nennt ein Petrinetz stark lebendig, wenn es für jede Transition t und jede (von m_0 aus) erreichbare Markierung m eine Markierung m' gibt, die von m aus erreichbar ist und für die t aktiviert ist.

Bezüglich des Erreichbarkeitsgraphen bedeutet dies, für jede Transition t: von jedem Knoten des Graphen aus ist ein Übergang erreichbar, der mit t beschriftet ist.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Schwache Lebendigkeit (Definition)

Man nennt ein Petrinetz schwach lebendig, wenn es für jede Transition t eine (von m_0 aus) erreichbare Markierung gibt, für die t aktiviert ist.

Bezüglich des Erreichbarkeitsgraphen bedeutet dies, dass es für jede Transition t mindestens einen Übergang gibt, der mit t beschriftet ist.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Verklemmung (Definition)

Man sagt, dass ein Petrinetz eine Verklemmung (oder einen Deadlock) enthält, wenn es eine (von m_0 aus) erreichbare Markierung gibt, für die keine Transition aktiviert ist.

Bezüglich des Erreichbarkeitsgraphen bedeutet dies, dass es einen Knoten gibt, von dem aus es keinen Übergang gibt.

Ein Petrinetz, das keine Verklemmung enthält, nennt man verklemmungsfrei.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Stärke der starken Lebendigkeit

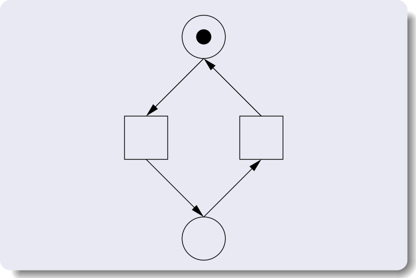
Wenn wir nur Petrinetze betrachten, deren Transitionsmenge nicht leer ist, gilt:

Jedes stark lebendige Petrinetz ist sowohl schwach lebendig als auch verklemmungsfrei.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

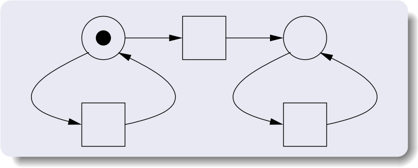
Ein Beispiel für ein stark lebendiges Petrinetz …



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

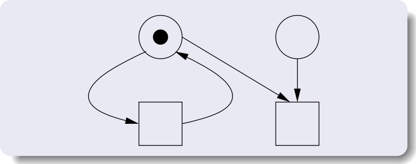
Ein Beispiel für ein schwach lebendiges und verklemmungsfreies Petrinetz, das jedoch nicht stark lebendig ist . . .



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

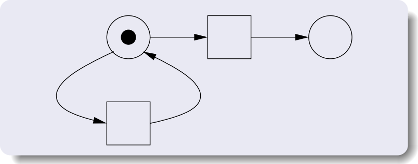
Ein Beispiel für ein verklemmungsfreies Petrinetz, das jedoch nicht schwach lebendig ist ...



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

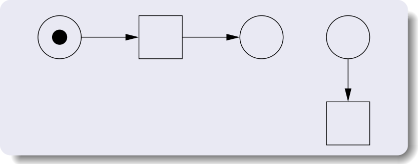
Ein Beispiel für ein schwach lebendiges Petrinetz, das jedoch eine Verklemmung enthält . . .



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

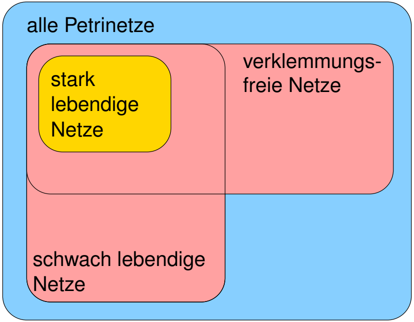
Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

Ein Beispiel für ein Petrinetz, das eine Verklemmung enthält und das auch nicht schwach lebendig ist . . .



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Überblick über die verschiedenen Petrinetzklassen (unter der Voraussetzung, dass jedes betrachtete Petrinetz mindestens eine Transition enthält):



Petrinetze: Beschränktheit

Sichere, beschränkte und unbeschränkte Petrinetze (Definition)

Man nennt ein Petrinetz . . .

- sicher (oder 1-sicher), wenn
  - Für jede Transition t und für jede Stelle s gilt: ${}^{\bullet}t(s) \leq 1$ und $t^{\bullet}(s) \leq 1$, also alle Gewichte sind höchstens 1, und
  - für jede erreichbare Markierung m und jede Stelle s gilt, dass $m(s) \leq 1$.
- beschränkt, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für jede erreichbare Markierung m und jede Stelle s gilt, dass $m(s) \leq c$.
- unbeschränkt, wenn es für jede Konstante $c \in \mathbb{N}_0$ eine erreichbare Markierung m und eine Stelle s gibt mit $m(s) > c$.

Beobachtung: Ein Petrinetz ist unbeschränkt genau dann, wenn sein Erreichbarkeitsgraph unendlich groß ist.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Weitere wichtige Begriffe bei Petrinetzen sind Kausalität, Nebenläufigkeit und Konflikt.

Wir beschäftigen uns auch damit etwas genauer.

Kausalität (Definition)

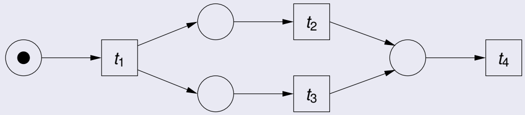
In einem Petrinetz nennt man die Transition t_1 eine notwendige Bedingung für das Schalten der Transition t_2 genau dann, wenn für alle Schaltfolgen $\tilde{t}$ gilt:

falls $m_0\ [\tilde{t}\, t_2\rangle\ m$ für eine Markierung m, dann enthält $\tilde{t}$ mit Sicherheit die Transition t_1.

Bezüglich des Erreichbarkeitsgraphen bedeutet dies, dass jeder Knoten, von dem aus es einen mit t_2 beschrifteten Übergang gibt, nur über Wege erreichbar ist, in denen t_1 vorkommt.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiel für Kausalität:



- Hier ist t_1 eine notwendige Bedingung für t_4.
- Aber t_2 ist hier keine notwendige Bedingung für t_4. Denn nicht jede Schaltfolge, die zu t_4 führt, enthält t_2 (z.B. $\tilde{t} = t_1 t_3$).

  Analoges gilt für t_3.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Transitivität der Kausalität

Wenn t_1 eine notwendige Bedingung für t_2 ist, und t_2 eine notwendige Bedingung für t_3 ist, dann ist t_1 eine notwendige Bedingung für t_3.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Nebenläufigkeit (Definition)

Die Transitionen $t_1, \dots, t_n$ einer Menge $T' \subseteq T$ nennt man für die Markierung m nebenläufig aktiviert, wenn

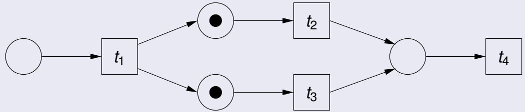
$$^\bullet t_1 \oplus \cdots \oplus {}^\bullet t_n \leq m.$$

Das heißt, wenn die Markierung m genug Marken enthält, um alle Transitionen aus T' „gleichzeitig" zu feuern.

Beobachtung: Wenn die Transitionen einer Menge T' für die Markierung m nebenläufig aktiviert sind, so ist dies auch für jede Teilmenge von T' der Fall.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiele für Nebenläufigkeit:

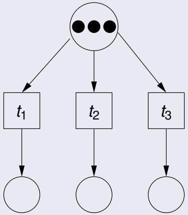


Die Transitionen t_2 und t_3 sind für die hier gezeigte Markierung nebenläufig aktiviert.

Denn:

$$\begin{aligned} {}^\bullet t_2 &= (0,1,0,0) \\ {}^\bullet t_3 &= (0,0,1,0) \\ {}^\bullet t_2 \oplus {}^\bullet t_3 &\leq (0,1,1,0) \end{aligned}$$

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

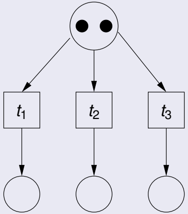


Die Transitionen t_1, t_2 und t_3 sind für die hier gezeigte Markierung nebenläufig aktiviert.

Denn:

$$\begin{aligned}
{}^\bullet t_1 &= (1,0,0,0) \\
{}^\bullet t_2 &= (1,0,0,0) \\
{}^\bullet t_3 &= (1,0,0,0) \\
{}^\bullet t_1 \oplus {}^\bullet t_2 \oplus {}^\bullet t_3 &\leq (3,0,0,0)
\end{aligned}$$

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

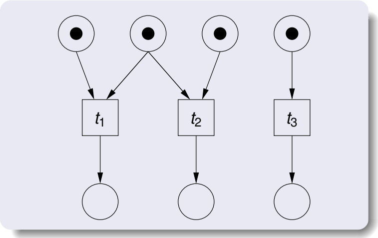


Die Transitionen der Mengen $\{t_1, t_2\}$, $\{t_2, t_3\}$ und $\{t_1, t_3\}$ sind für die hier gezeigte Markierung jeweils nebenläufig aktiviert. Dies gilt jedoch nicht für die Menge $\{t_1, t_2, t_3\}$ insgesamt.

Denn:

$$\begin{aligned} {}^\bullet t_1 = {}^\bullet t_2 = {}^\bullet t_3 &= (1,0,0,0) \\ {}^\bullet t_1 \oplus {}^\bullet t_2 = {}^\bullet t_2 \oplus {}^\bullet t_3 = {}^\bullet t_1 \oplus {}^\bullet t_3 &\leq (2,0,0,0) \\ {}^\bullet t_1 \oplus {}^\bullet t_2 \oplus {}^\bullet t_3 &\not\leq (2,0,0,0) \end{aligned}$$

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt



Die Transitionen der Mengen $\{t_1, t_3\}$ und $\{t_2, t_3\}$ sind für die hier gezeigte Markierung jeweils nebenläufig aktiviert. Dies gilt jedoch nicht für die Mengen $\{t_1, t_2\}$ und $\{t_1, t_2, t_3\}$.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass Nebenläufigkeit nicht transitiv ist: für die angegebene Markierung ist t_1 nebenläufig aktiviert zu t_3, und t_3 ist nebenläufig aktiviert zu t_2, jedoch sind t_1 und t_2 <u>nicht</u> nebenläufig aktiviert.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Konsequenzen von Nebenläufigkeit

Wenn die Transitionen einer Menge T' für eine Markierung m nebenläufig aktiviert sind, so ist jede Anordnung dieser Transitionen eine Schaltfolge ausgehend von m.

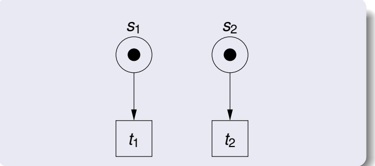
Das heißt, für jede Sequenz $\tilde{t}$, in der jede Transition aus T' genau einmal vorkommt, gibt es eine Markierung m' mit $m\,[\,\tilde{t}\,\rangle\,m'$.

Und diese Markierung m' ist durch T' eindeutig bestimmt (also unabhängig von $\tilde{t}$).

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Nebenläufig aktivierte Transitionen führen daher in Erreichbarkeitsgraphen zu Strukturen, die die Form eines Quadrats (oft Diamond genannt) oder (höherdimensionalen) Würfels haben.

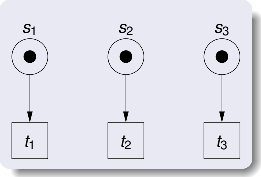
Beispiel für so ein Quadrat:

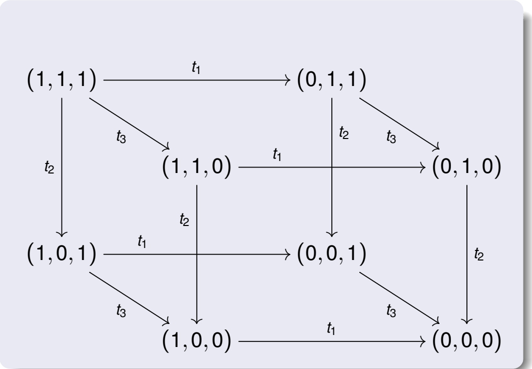


$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & (0,1) \arrow[d, "t_2"] \\
(1,0) \arrow[r, "t_1"] & (0,0)
\end{tikzcd}$$

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiel für Entstehen eines Würfels:



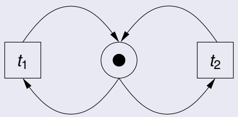


Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Frage: Wenn ausgehend von einer Markierung m jede Anordnung der Transitionen einer Menge T' eine Schaltfolge darstellt, sind dann die Transitionen aus T' für m nebenläufig aktiviert?

Nein, nicht unbedingt!

Gegenbeispiel:

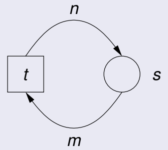


Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Schlinge (Definition)

Eine Schlinge (oder Schleife) in einem Petrinetz besteht aus einer Transition t und einer Stelle s mit ${}^\bullet t(s) > 0$ und $t^\bullet(s) > 0$.

Grafisch:



Für schlingenfreie Petrinetze gilt:

Seien eine Markierung m und eine Menge T' von Transitionen gegeben, so dass jede Anordnung dieser Transitionen von m ausgehend schaltbar ist.

Dann sind die Transitionen aus T' für m nebenläufig aktiviert.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Konflikt (Definition)

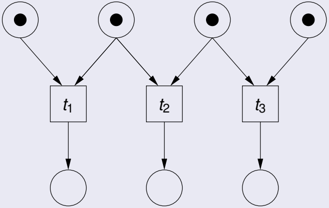
Zwei Transitionen $t, t' \in T$ stehen für die Markierung m in Konflikt genau dann, wenn:

- t und t' sind beide für m aktiviert und
- t und t' sind für m nicht nebenläufig aktiviert.

Anschaulich: Jede einzelne der beiden Transitionen könnte schalten, aber nicht tatsächlich beide „gleichzeitig“.

Das liegt immer daran, dass sie eine gemeinsame Stelle in den Vorbedingungen haben. Das heißt, es gibt eine Stelle s mit ${}^\bullet t(s) \geq 1$ und ${}^\bullet t'(s) \geq 1$.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt



Für die hier gezeigte Markierung steht t_1 in Konflikt mit t_2.

Denn:

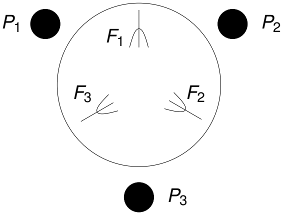
$$\begin{aligned} (1,1,0,0,0,0,0) &\leq (1,1,1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0,0,0) &\leq (1,1,1,1,0,0,0) \\ (1,1,0,0,0,0,0) \oplus (0,1,1,0,0,0,0) &\not\leq (1,1,1,1,0,0,0) \end{aligned}$$

Außerdem steht t_2 in Konflikt mit t_3. Jedoch steht t_1 <u>nicht</u> in Konflikt mit t_3 (keine Transitiviät der Konfliktrelation).

Beispiel: Dining Philosophers

Wir betrachten nochmals das Beispiel der Dining Philosophers (speisende Philosophen):

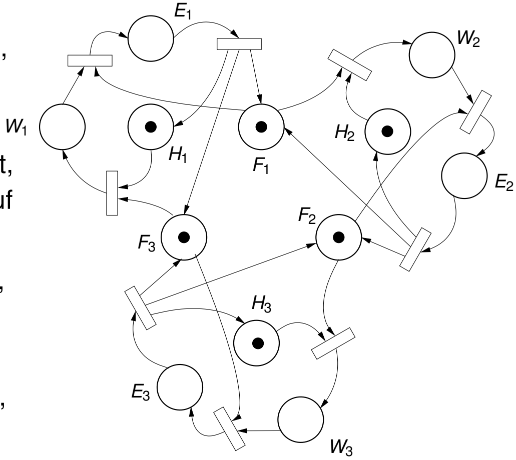
- Es sitzen drei Philosophen P_i um einen runden Tisch, zwischen je zwei Philosophen liegt eine Gabel (fork) F_i.
- Philosophen werden von Zeit zu Zeit hungrig H_i und benötigen zum Essen E_i beide benachbarte Gabeln.
- Jeder Philosoph nimmt zu einem beliebigen Zeitpunkt beide Gabeln nacheinander auf (die rechte zuerst), isst und legt anschließend beide Gabeln wieder zurück.



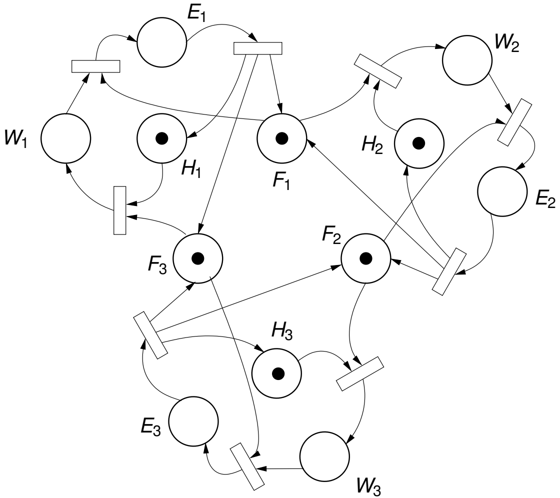
Beispiel: Dining Philosophers

Modellierung als Petrinetz:

- Marke bei H_i bedeutet, Philosoph P_i ist hungrig.
- Marke bei W_i bedeutet, Philosoph P_i wartet auf linke Gabel.
- Marke bei F_i bedeutet, die Gabel F_i liegt auf dem Tisch.
- Marke bei E_i bedeutet, Philosoph P_i isst.

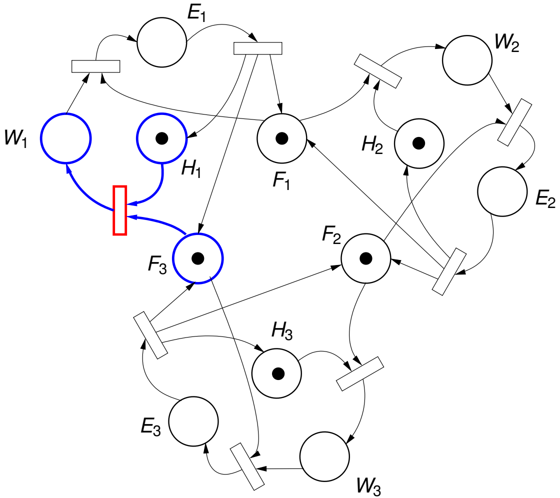


Beispiel: Dining Philosophers



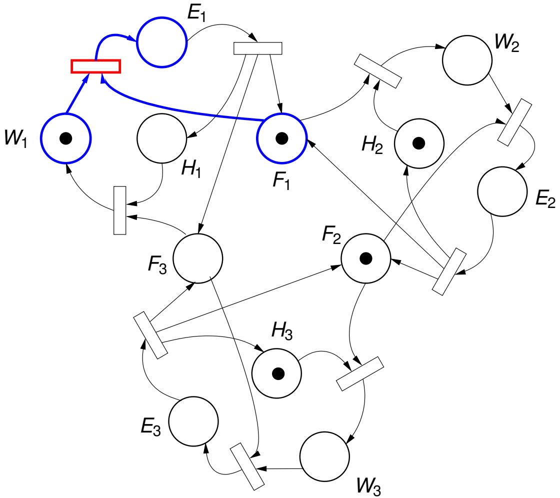
- Der erste Philosoph P_1 möchte essen.

Beispiel: Dining Philosophers



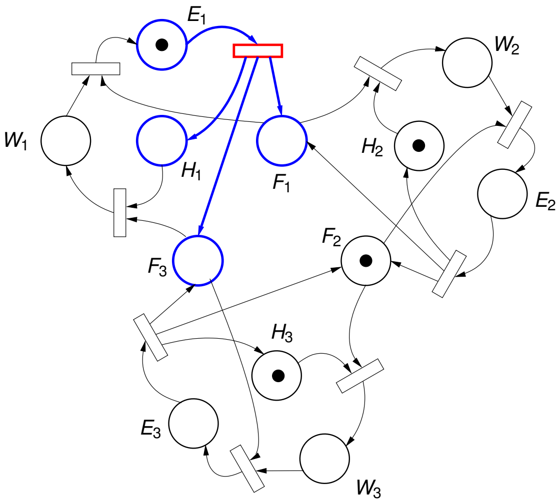
- P_1 nimmt die rechte Gabel F_3.

Beispiel: Dining Philosophers



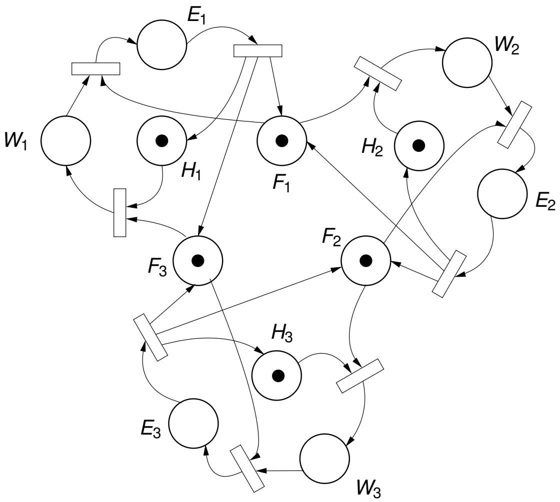
- P_1 nimmt die linke Gabel F_1 und isst.

Beispiel: Dining Philosophers



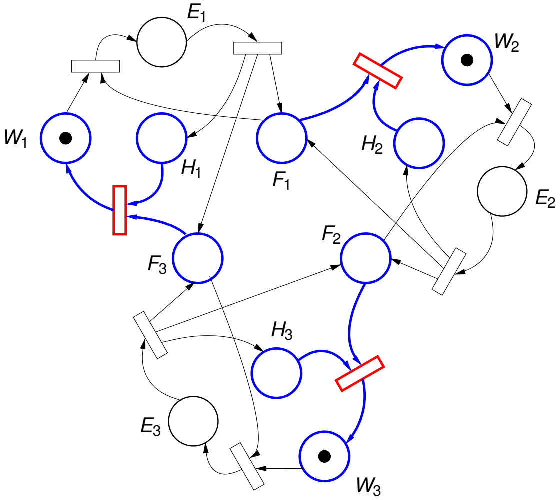
- P_1 legt Gabeln F_3 und F_1 zurück.

Beispiel: Dining Philosophers



- Gibt es Möglichkeit der Verklemmung (Deadlock)?

Beispiel: Dining Philosophers



- Ja! Nachdem alle nebenläufig ihre rechte Gabel nehmen.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Erinnerung: Ein Petrinetz ist unbeschränkt genau dann, wenn sein Erreichbarkeitsgraph unendlich groß ist.

Aber wie können wir feststellen, ob Unendlichkeit vorliegt?

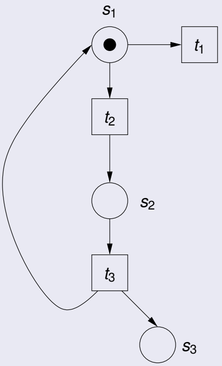
Und gibt es in diesem Fall trotzdem noch eine (endliche, grafische) Darstellung, die „in gewisser Weise“ alle erreichbaren Markierungen repräsentiert?

Und an Hand derer wir vielleicht sogar Eigenschaften wie Lebendigkeit und Kausalitäten entscheiden können?

$\leadsto$ Überdeckungsbaum $\leadsto$ Überdeckungsgraph

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Beispiel eines unbeschränkten Petrinetzes:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

einige Schaltfolgen:

$$\downarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_1} (0,0,0)$$

$$\downarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,1) \xrightarrow{t_1} (0,0,1)$$

$$\downarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,1) \xrightarrow{t_2} (0,1,1) \xrightarrow{t_3} (1,0,2) \xrightarrow{t_1} (0,0,2)$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Beobachtungen:

- Das Verhalten von Petrinetzen ist „monoton“, das heißt, jede Schaltfolge ist auch dann noch möglich, wenn man der Ausgangsmarkierung (nicht unbedingt gleich der Anfangsmarkierung m_0) zusätzliche Marken hinzufügt.
- Wenn zwei Markierungen m, m' existieren, so dass gilt:
  - m ist echt kleiner als m' (das heißt, $m \leq m'$ und $m \neq m'$, ab jetzt geschrieben als $m < m'$) und
  - es gibt eine Schaltfolge von m zu m',

  dann kann man dieselbe Folge noch einmal von m' aus schalten und erhält eine wiederum echt größere Markierung m''.

am Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow (1,0,0) & \xrightarrow{t_2} & (0,1,0) & \xrightarrow{t_3} & (1,0,1) & \xrightarrow{t_2} & (0,1,1) & \xrightarrow{t_3} & (1,0,2) & \xrightarrow{t_1} & (0,0,2) \\ m & & < & & m' & & < & & m'' & & \end{array}$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Weitere Beobachtung:

- So einen Abschnitt kann man dann sogar immer weiter wiederholen, und die Markierung dadurch immer weiter wachsen lassen.
- Man nennt dies auch „Pumpen“ der Folge.

am Beispiel:

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & (1,0,0) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,0) \arrow[r, "t_3"] & (1,0,1) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,1) \arrow[r, "t_3"] & (1,0,2) \arrow[d, "t_2"] \\
& & & & & (0,1,2) \arrow[d, "t_3"] \\
& (1,0,5) \arrow[d, "t_1"] & (0,1,4) \arrow[l, "t_3"'] & (1,0,4) \arrow[l, "t_2"'] & (0,1,3) \arrow[l, "t_3"'] & (1,0,3) \arrow[l, "t_2"'] \\
& (0,0,5) & & & &
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Dieses „immer weiter wachsen lassen“ kann man dadurch repräsentieren, dass man in den betroffenen Stellen eine spezielle ω-Markierung einführt, etwa:

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega)$$

Formal:

Sobald eine neue Markierung m' hinzugefügt wird, führe für jede Vorgängermarkierung m mit $m < m'$ ...

$$\rightarrow m_0 \dashrightarrow m \dashrightarrow m'$$

... folgende Ersetzung auf m' durch:

- Für jedes $s \in S$ mit $m(s) < m'(s)$, setze $m'(s)$ auf ω.
- (Für alle anderen $s \in S$ gilt $m(s) = m'(s)$ und wir lassen $m'(s)$ unverändert.)

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Bemerkungen:

- Die neu erzeugten besonderen ω-Markierungen ordnen einer oder mehreren Stellen sozusagen „unendlich“ viele Marken zu.

  Dies nimmt das wiederholte Schalten der Transitionsfolge von m zu m' vorweg, die nach und nach in den ω-Stellen beliebig viele Marken produzieren könnte.

- Wir müssen auch für die ω-Markierungen, mit den konzeptionell beliebig vielen Marken auf bestimmten Stellen, ausdrücken können, wie jenseits der „gepumpten“ Teilfolge weiter geschaltet werden könnte, zum Beispiel:

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega) \xrightarrow{t_1} \ ?$$

- Dafür benötigen wir extra „Rechenregeln“ bezüglich ω.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ legen wir fest: $\omega + k = \omega$ und $\omega - k = \omega$.

Außerdem gilt uns ω als größer als jede natürliche Zahl, und $\omega \leq \omega$.

Damit haben wir jetzt zum Beispiel:

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega) \xrightarrow{t_1} (0,0,\omega)$$

denn:

$$\begin{aligned} {}^\bullet t_1 &= (1,0,0) \\ t_1^\bullet &= (0,0,0) \\ (1,0,0) &\leq (1,0,\omega) \\ (1,0,\omega) \ominus (1,0,0) \oplus (0,0,0) &= (0,0,\omega) \end{aligned}$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Außerdem aber auch:

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega) \xrightarrow{t_2} (0,1,\omega) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega)$$

denn:

$$\begin{aligned} {}^\bullet t_2 &= (1,0,0) \\ t_2^\bullet &= (0,1,0) \\ (1,0,0) &\leq (1,0,\omega) \\ (1,0,\omega) \ominus (1,0,0) \oplus (0,1,0) &= (0,1,\omega) \end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned} {}^\bullet t_3 &= (0,1,0) \\ t_3^\bullet &= (1,0,1) \\ (0,1,0) &\leq (0,1,\omega) \\ (0,1,\omega) \ominus (0,1,0) \oplus (1,0,1) &= (1,0,\omega) \end{aligned}$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Damit könnten wir jetzt wieder unendliche Pfade produzieren, etwa:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (1,0,0) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,0) \arrow[r, "t_3"] & (1,0,\omega) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,\omega) \arrow[r, "t_3"] & (1,0,\omega) \arrow[d, "t_2"] \\
& & & & & (0,1,\omega) \arrow[d, "t_3"] \\
& (1,0,\omega) \arrow[d, "t_2"] & (0,1,\omega) \arrow[l, "t_3"'] & (1,0,\omega) \arrow[l, "t_2"'] & (0,1,\omega) \arrow[l, "t_3"'] & (1,0,\omega) \arrow[l, "t_2"'] \\
& \vdots & & & &
\end{tikzcd}
$$

Um das zu vermeiden, brechen wir ab, sobald sich eine Markierung exakt wiederholt.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Für das Beispiel haben wir jetzt insgesamt:

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_1} (0,0,0)$$

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega) \xrightarrow{t_1} (0,0,\omega)$$

$$\rightarrow (1,0,0) \xrightarrow{t_2} (0,1,0) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega) \xrightarrow{t_2} (0,1,\omega) \xrightarrow{t_3} (1,0,\omega)$$

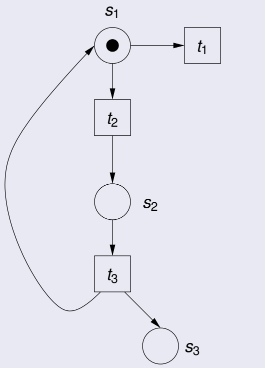
(Man beachte, dass der zweite und dritte Pfad oben aus verschiedenen Gründen abbrechen.)

Der Überdeckungsbaum stellt die Sammlung dieser Pfade kompakter, nämlich so weit wie möglich überlappend dar, indem gemeinsame Anfangsstücke nicht mehrfach repräsentiert werden.

Der englische Name für Überdeckungsbäume ist covering trees.

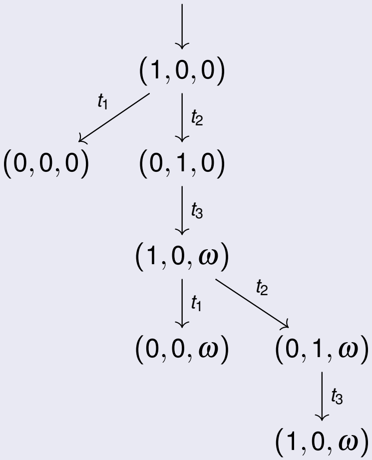
Petrinetze: Überdeckungsgraph

Beispiel:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

Überdeckungsbaum:



Petrinetze: Überdeckungsgraph

Eigenschaften des Überdeckungsbaums (I)

- Die Konstruktion des Überdeckungsbaums terminiert immer nach endlich vielen Schritten.
- Irgendwelche ω-Markierungen treten genau dann auf, wenn das Petrinetz unbeschränkt ist.
  (Das heißt, der Überdeckungsbaum kann auch dazu verwendet werden, zu überprüfen, ob ein Petrinetz unbeschränkt ist.)
- Auch etwa schwache Lebendigkeit sowie Kausalitäten lassen sich an Hand des Überdeckungsbaums entscheiden.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

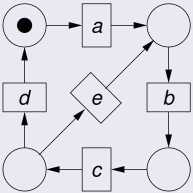
Eigenschaften des Überdeckungsbaums (II)

Sei N ein Petrinetz und B der dazugehörige Überdeckungsbaum. Dann gilt:

- Für jede erreichbare Markierung m von N gibt es einen Knoten m' in B mit $m \leq m'$.
- Für jeden Knoten m' in B und jedes $c \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine erreichbare Markierung m von N, so dass für alle Stellen s gilt:
  - $m(s) = m'(s)$, falls $m'(s) \neq \omega$
  - $m(s) > c$, falls $m'(s) = \omega$.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Natürlich ist die Konstruktion eines Überdeckungsbaums auch für beschränkte Petrinetze möglich, etwa:



Stellenordnung wie in früherer Vorlesung

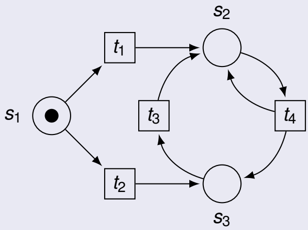
Überdeckungsbaum:

$$\downarrow$$
$$(1,0,0,0)$$
$$\downarrow a$$
$$(0,1,0,0)$$
$$\downarrow b$$
$$(0,0,0,1)$$
$$\downarrow c$$
$$(0,0,1,0)$$
$$\swarrow d \qquad \searrow e$$
$$(1,0,0,0) \qquad (0,1,0,0)$$

Allerdings ist in solchen Fällen der Erreichbarkeitsgraph klar attraktiver.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Und manchmal wird der Überdeckungsbaum schlicht unhandlich:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

Überdeckungsbaum:

$$\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d] & \\
 & & (1,0,0) \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[d, "t_2"] & \\
 & (0,1,0) \arrow[d, "t_4"] & (0,0,1) \arrow[d, "t_3"] & \\
 & (0,1,\omega) \arrow[dl, "t_3"'] \arrow[d, "t_4"] & (0,1,0) \arrow[d, "t_4"] & \\
(0,\omega,\omega) \arrow[d, "t_3"'] \arrow[dr, "t_4"] & (0,1,\omega) & (0,\omega,\omega) \arrow[d, "t_3"'] \arrow[dr, "t_4"] & \\
(0,\omega,\omega) & (0,\omega,\omega) & (0,\omega,\omega) & (0,\omega,\omega)
\end{tikzcd}$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Gibt es ein Konstrukt, das die Vorteile von Überdeckungsbaum und Erreichbarkeitsgraph vereint?

Ja, einen Überdeckungsgraph (englisch: covering graph).

Grundsätzliche Idee:

- Konstruktion wie Überdeckungsbaum
- Aber niemals Erzeugung zweier Knoten mit gleicher Markierung
- Stattdessen Pfeile zu früher erzeugten Knoten

Feststellung: Für beschränkte Petrinetze sind Erreichbarkeitsgraph und Überdeckungsgraph das Gleiche.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Konstruktion eines Überdeckungsgraphen – alternativ beschrieben

- Führe zunächst wie gewohnt die Konstruktion des Erreichbarkeitsgraphen aus.
- Sobald eine Markierung m' erzeugt wurde, führe für jede Markierung $m < m'$ irgendwo zwischen m_0 und m' …

  $$\to m_0 \dashrightarrow m \dashrightarrow m'$$

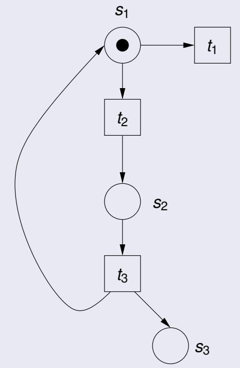
  … folgende Ersetzung auf m' durch:

  - Für jedes $s \in S$ mit $m(s) < m'(s)$, setze $m'(s)$ auf ω.

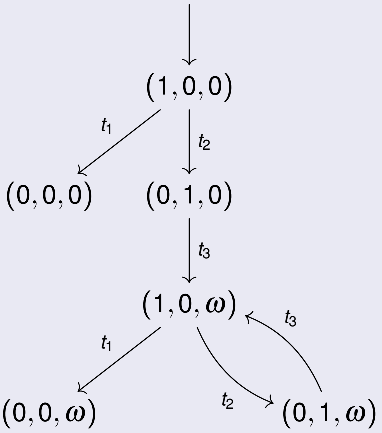
  Sollte sich danach herausstellen, dass das neue m' (welches auch unverändert das ursprüngliche sein könnte) schon im Graph vorkommt, verwende diesen vorhandenen Knoten.
- Mache mit der Konstruktion weiter, bis keine Markierungen mehr hinzugefügt werden können.

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Beispiel:



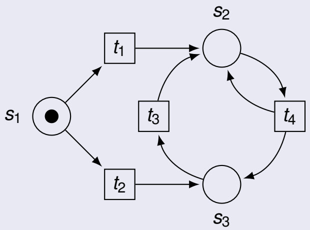
Stellenordnung: s_1, s_2, s_3



Petrinetze: Überdeckungsgraph

Ein Petrinetz kann mehrere Überdeckungsgraphen haben.

Hier für ein Beispiel, für das wir auch schon den Überdeckungsbaum gesehen haben:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

$$
\begin{tikzcd}
 & & (0,1,0) \arrow[r, "t_4"] & (0,1,\omega) \arrow[r, "t_3"] \arrow[loop below, "t_4"] & (0,\omega,\omega) \arrow[loop below, "t_3, t_4"] \\
 \arrow[r] & (1,0,0) \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"'] & & & \\
 & & (0,0,1) \arrow[uu, "t_3"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (0,1,0) \arrow[r, "t_4"] & (0,\omega,\omega) \arrow[loop below, "t_3, t_4"] \\
 \arrow[r] & (1,0,0) \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"'] & & \\
 & & (0,0,1) \arrow[uu, "t_3"] &
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Überdeckungsgraph

Überdeckungsgraphen haben analoge nützliche Eigenschaften wie Überdeckungsbäume.

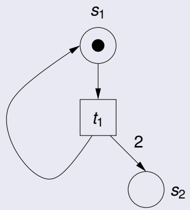
Also insbesondere Termination der Erzeugung, die Möglichkeit zum Test auf Unbeschränktheit und auf schwache (aber nicht auf starke) Lebendigkeit eines Petrinetzes, und auf Kausalitäten, sowie:

- Für jede erreichbare Markierung m eines Petrinetzes gibt es einen Knoten m' im Überdeckungsgraph mit $m \leq m'$.
- Für jeden Knoten m' im Überdeckungsgraph und jedes $c \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine erreichbare Markierung m des Petrinetzes, so dass für alle Stellen s gilt:
  - $m(s) = m'(s)$, falls $m'(s) \neq \omega$
  - $m(s) > c$, falls $m'(s) = \omega$.

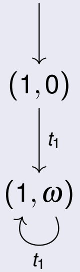
Petrinetze: Überdeckungsgraph

Frage: Ist für eine ω-Markierung m' im Überdeckungsgraph vielleicht sogar jede Markierung m des Petrinetzes mit $m \leq m'$ erreichbar?

Nein! Gegenbeispiel:



Stellenordnung: s_1, s_2



Die Markierung $(1,1)$ ist kleiner als $(1,\omega)$, ist aber in dem Petrinetz nicht erreichbar.

Petrinetze: Erreichbarkeitsproblem

Entscheidbarkeit des Erreichbarkeitsproblems

Es gibt ein Verfahren, das für ein gegebenes (unbeschränktes) Petrinetz N und eine Markierung m entscheidet, ob m in N erreichbar ist. (Mayr, 1984)

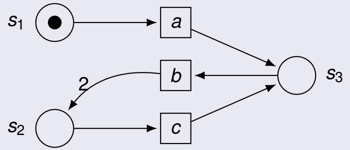
- Dieses Verfahren ist jedoch extrem aufwändig und in der Praxis derzeit nicht einsetzbar.
- Die obige Aussage bedeutet jedoch auch, dass Petrinetze nicht zu den mächtigsten Berechnungsmodellen gehören. Es gibt nämlich Berechnungsmodelle, für die das Erreichbarkeitsproblem nicht entscheidbar ist.

  Anders ausgedrückt: Petrinetze sind nicht Turing-mächtig ($\rightsquigarrow$ Vorlesung „Berechenbarkeit und Komplexität").

  Das liegt vor allem daran, dass Petrinetze keine Nulltests folgender Form erlauben: „Die Transition t kann nur feuern, wenn in der Stelle s keine Marken liegen."

Petrinetze: Überdeckungsgraph – Wiederholung

Ein anderes Beispiel mit Überdeckungsbaum:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

und Überdeckungsgraph:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (1,0,0) \arrow[r, "a"] & (0,0,1) \arrow[r, "b"] & (0,2,0) \arrow[d, "c"] \\
& (0,\omega,\omega) \arrow[loop below, "{b,c}"] & (0,\omega,0) \arrow[l, "c"'] & (0,\omega,1) \arrow[l, "b"'] \arrow[ll, bend left, "c"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & \\
& (1,0,0) \arrow[d, "a"] & \\
& (0,0,1) \arrow[d, "b"] & \\
& (0,2,0) \arrow[d, "c"] & \\
& (0,\omega,1) \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "c"] & \\
(0,\omega,0) \arrow[d, "c"'] & & (0,\omega,\omega) \arrow[dl, "b"'] \arrow[d, "c"] \\
(0,\omega,\omega) \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, "c"] & (0,\omega,\omega) & (0,\omega,\omega) \\
(0,\omega,\omega) & (0,\omega,\omega) &
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Wir betrachten zum Abschluss des Petrinetz-Teils der Vorlesung nun noch einige „Fallstudien“, also Beispiele, an denen typische Szenarien und spezielle Modellierungs-„Muster“ nochmals deutlich werden ...

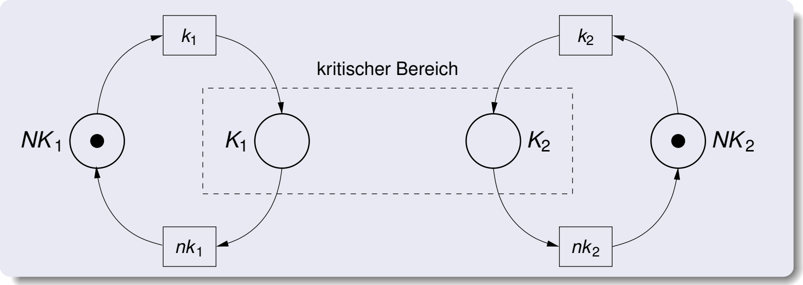
Zunächst behandeln wir das Konzept des wechselseitigen Ausschlusses (engl. mutual exclusion).

- Wir betrachten zwei Akteure, die jeweils einen kritischen Bereich haben.
- Beide Akteure dürfen nicht gleichzeitig in ihren kritischen Bereich kommen, da sie sich dort gegenseitig behindern und unerwünschtes Verhalten auslösen würden (z.B. indem beide Akteure in dieselbe Datei schreiben).

  Es darf sich also immer höchstens ein Akteur im kritischen Bereich befinden.

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Ursprüngliches System:

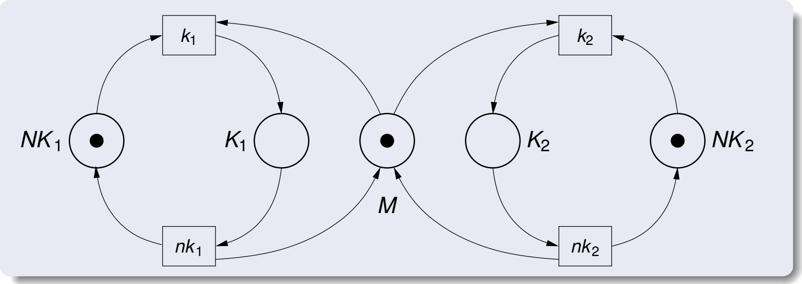


Bedeutung der Stellen:

K_1: kritischer Bereich Akteur 1
NK_1: nicht-kritischer Bereich Akteur 1
K_2: krititischer Bereich Akteur 2
NK_2: nicht-kritischer Bereich Akteur 2

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Erweitertes System mit Synchronisation:



Bedeutung der Stellen:

- K_1: kritischer Bereich Akteur 1
- NK_1: nicht-kritischer Bereich Akteur 1
- K_2: krititischer Bereich Akteur 2
- NK_2: nicht-kritischer Bereich Akteur 2
- M: Hilfsstelle, sogenannter Mutex

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Wir möchten zeigen, dass in den Stellen K_1, K_2 niemals gleichzeitig Marken liegen.

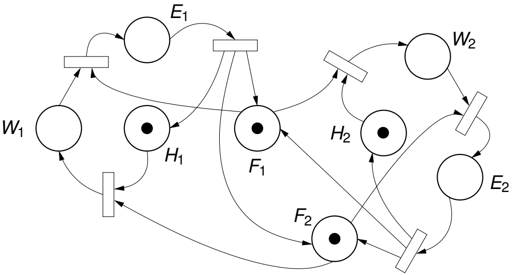
Erreichbarkeitsgraph:

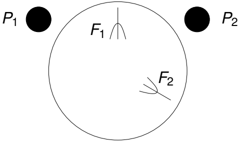
$$
\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \\
(1,\mathbf{0},1,\mathbf{0},1) \arrow[r, shift left, "k_2"] \arrow[d, shift right, "k_1"'] & (1,\mathbf{0},0,\mathbf{1},0) \arrow[l, shift left, "nk_2"] \\
(0,\mathbf{1},0,\mathbf{0},1) \arrow[u, shift right, "nk_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Stellenordnung: NK_1, K_1, M, K_2, NK_2

Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

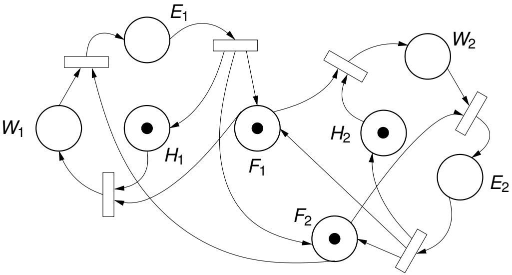
Wir kommen wieder auf die speisenden Philosophen zurück, aber schicken den dritten Philosophen nach Hause:



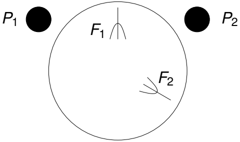


Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Wir kommen wieder auf die speisenden Philosophen zurück, aber schicken den dritten Philosophen nach Hause:



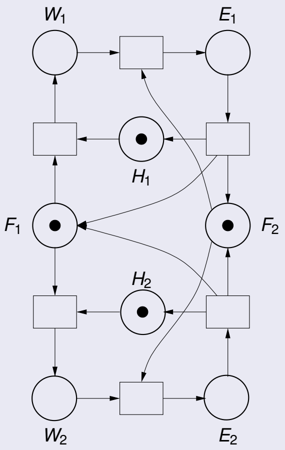
Außerdem machen wir den ersten Philosophen zum Linkshänder (er nimmt die linke Gabel zuerst).



Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Anders dargestellt:

Links- und rechtshändige Philosophen



Verklemmungsfrei durch Synchronisation!

Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Ein anderes Erfordernis, das wir immer wieder mal ausdrücken wollten (z.B. beim Keksautomat), war die Begrenzung der Kapazität einzelner Stellen im Petrinetz.

Eine Möglichkeit zum Umgang damit ist die Einführung einer speziellen Art von Petrinetzen:

Petrinetz mit Kapazitäten (Definition)

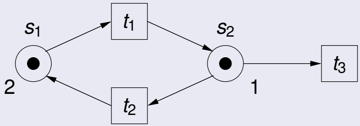
Ein Petrinetz mit Kapazitäten besteht aus einem (herkömmlichen) Petrinetz, mit Stellenmenge S, und einer Kapazitätsfunktion $k\colon S \to \mathbb{N}_0$. Für die Anfangsmarkierung m_0 muss gelten: $m_0 \leq k$.

Intuition: Jede Stelle s darf höchstens $k(s)$ Marken enthalten.

In der grafischen Darstellung werden die Kapazitäten an die Stellen geschrieben.

Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Beispielnetz mit Kapazitäten



$k(s_1) = 2,\ k(s_2) = 1$

Natürlich muss die Dynamik angepasst werden:

Aktivierung/Schalten bei Petrinetzen mit Kapazitäten (Definition)

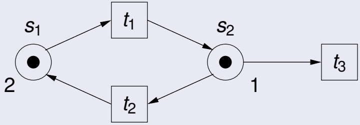
Eine Transition t ist für eine Markierung m aktiviert, wenn gilt:

1. ${}^\bullet t \leq m$
2. und $m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet \leq k$.

Das heißt, eine Transition darf nur dann schalten, wenn dadurch die Kapazitäten nicht überschritten werden.

Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Beispielnetz mit Kapazitäten



Erreichbarkeitsgraph

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & (1,1) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, bend left, "t_2"] & (1,0) \arrow[d, bend left, "t_1"] & \\ & (2,0) \arrow[u, bend left, "t_1"] & (0,1) \arrow[u, bend left, "t_2"] \arrow[r, "t_3"] & (0,0) \end{tikzcd}$$

Stellenordnung: s_1, s_2

Insbesondere: Für die Anfangsmarkierung $(1,1)$ ist die Transition t_1 nicht aktiviert.

Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Es geht jedoch auch ohne Einführung einer neuen Petrinetz-Art!

Umwandlung eines Petrinetzes mit Kapazitäten in eines ohne

1. Füge zu jeder Stelle s eine sogenannte Komplementstelle $\overline{s}$ hinzu. In der neuen Anfangsmarkierung enthält $\overline{s}$ genau $k(s) - m_0(s)$ Marken.

   Idee: Die Summe der Marken in der Stelle und der Komplementstelle ergibt immer die gewünschte Kapazität.

2. Falls eine Transition t insgesamt Marken aus einer Stelle s herausnimmt, $n = t^\bullet(s) - {}^\bullet t(s) < 0$, füge eine Kante von t nach $\overline{s}$ mit Gewicht $-n$ ein.

3. Falls eine Transition t insgesamt Marken in eine Stelle s hineinlegt, $n = t^\bullet(s) - {}^\bullet t(s) > 0$, füge eine Kante von $\overline{s}$ nach t mit Gewicht n ein.

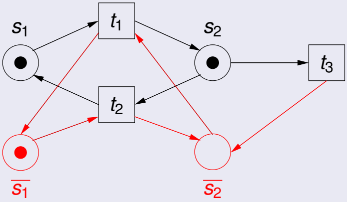
Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Mit dieser Konstruktion ist für jede erreichbare Markierung m sichergestellt, dass:

1. $m(s) + m(\overline{s}) = k(s)$ für jedes Paar $s, \overline{s}$;
2. eine Transition t nur schaltbar ist, wenn die Kapazitäten der Stellen in der Nachbedingung noch nicht ausgeschöpft sind. Das wird dadurch überprüft, dass die benötigten Restkapazitäten über die Komplementstellen abgefragt werden.

Petrinetze: Fallstudien (Kapazitätsbegrenzung)

Umgewandeltes Beispielnetz



Erreichbarkeitsgraph

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (1,1,1,0) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, bend left, "t_2"] & (1,1,0,1) \arrow[d, bend left, "t_1"] & \\
& (2,0,0,1) \arrow[u, bend left, "t_1"] & (0,2,1,0) \arrow[u, bend left, "t_2"] \arrow[r, "t_3"] & (0,2,0,1)
\end{tikzcd}
$$

Stellenordnung: $s_1, \overline{s_1}, s_2, \overline{s_2}$

Ausblick: Weitere Arten von Petrinetzen

Neben den soeben konzeptionell betrachteten Petrinetzen mit Kapazitäten gibt es noch weitere Arten/Erweiterungen von Petrinetzen.

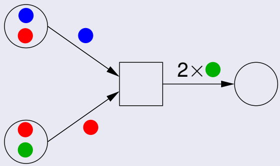
Zum Beispiel Attributierte Petrinetze, auch spezieller, bekannt unter Namen wie:

- Petrinetze mit individuellen Marken
- Prädikat-Transitions-Petrinetze
- engl. coloured Petri nets

Ausblick: Weitere Arten von Petrinetzen

Dabei haben die Marken Farben. Die Transitionen geben an, Marken welcher Farbe entnommen und erzeugt werden sollen.

Beispielsweise entnimmt folgende Transition eine blaue und eine rote Marke und erzeugt zwei grüne Marken.



Ausblick: Weitere Arten von Petrinetzen

Die „Farben" können dabei auch Elemente eines bestimmten Datentyps sein (z.B. Zahlen). Die Transitionen werden dann symbolisch annotiert und an ihnen können auch Bedingungen stehen.

Beispielsweise hat folgendes Petrinetz natürliche Zahlen als „Farben". Die Transition entnimmt der ersten Stelle eine Zahl x und der zweiten Stelle eine Zahl y. In die Stelle der Nachbedingung wird dann die Zahl $x + y$ gelegt. Die Transition darf nur schalten wenn $x > 3$.